Feuille de TD 4 - Matrices

On notera par $\mathcal{M}(n \times m, \mathbb{K})$ l'espace des matrices $n \times m$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Si $n = m$, on utilisera la notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Questions du cours.

(a) Donner la définition de somme et de produit de deux matrices.

(b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-ce que on a toujours $AB = BA$?

(c) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-ce que $AB = 0$ implique $A = 0$ ou $B = 0$?

(d) Donner la définition de transposée d'une matrice.

(e) Donner la définition de rang d'une matrice.

(f) Donner la définition de matrice inversible.

(g) Donner la définition de déterminant d'une matrice.

(h) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ecrire, si possible, ${}^t(AB)$ et ${}^t(A + B)$ en fonction de ${}^tA$ et ${}^tB$.

(i) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles. Est-ce que AB est inversible ? Si c'est le cas, exprimer $(AB)^{-1}$ en fonction de A^{-1} et B^{-1}.

Exercice 1. Considerons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices suivantes (quand bien définies) :

AB, BA, BC, CB, CD, DC, A^2, B^2,
E^2, AE, $(A+E)^2$, ABD, ${}^tCD$, ${}^tAA$, ${}^tDD$, $B\,{}^tB$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Est-ce que A est inversible ?

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Pour quels valeurs de λ la matrice A est inversible ?

(b) Calculer A^{-1} pour λ qui satisfait la condition du point précédent.

(c) Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Calculer le rang des matrices suivantes.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & -14 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, (g) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, (h) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, (i) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,

(j) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$, (k) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (l) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Calculer le déterminant et (quand elle existe) l'inverse des matrices suivantes, en utilisant la méthode des cofacteurs.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 14 & 3 & -1 \end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, (g) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 10 & -7 \end{pmatrix}$, (h) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (i) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 7 & 2 & 5 \\ -9 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Calculer l'inverse (quand elle existe) des matrices de l'exercice précédent en utilisant la méthode de Gauss. De même pour les matrices suivantes.

(j) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, (l) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & s & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, avec $s \in \mathbb{R}$ un paramètre réel.

(a) Calculer $\det(A)$.

(b) Pour quelles valeurs de s la matrice A n'est pas inversible ?

(c) Soit s satisfaisant la condition du point (b). Trouver un vecteur $v \neq 0$ tel que $Av = 0$.

(d) Supposons que la condition du point (b) ne soit pas satisfaite. Calculer A^{-1}.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $v = (-1, -5, 3)$.

(a) Montrer que $Av = 0$.

(b) En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 11. Une matrice A est dite *symétrique* si ${}^tA = A$, et *anti-symétrique* si ${}^tA = -A$. Montrer que toute matrice A peut s'écrire de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et une matrice anti-symétrique.

Exercice 12. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $A^2 = I$.
Donner un exemple d'une telle matrice non symétrique et à coefficients entiers relatifs ($\mathbb{Z}$).

Exercice 13. Pour chacune de ces matrices, discuter suivant les valeurs du réel m si elle est inversible, calculer le rang, et donner, le cas échéant, son inverse.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ m & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & m & -2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & m \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & m \\ m-1 & m-2 & 1-m \end{pmatrix}$, (g) $\begin{pmatrix} m & -2 & 2m-2 \\ -m & 2m & 0 \\ 2 & -4 & m-1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $A = \lambda I + T$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Vérifier que $T^3 = 0$ et que λI et T commutent.

(b) Calculer A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $A^2 - 3A = -2I_3$, où I_3 est la matrice identité dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) En déduire que A est inversible. Déterminer A^{-1}.

Exercice 16. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $A^2 = -I$. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $A^2 = A$.

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 4A + I = 0$. En déduire que A, est inversible et calculer son inverse.

Exercice 18. On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer P^{-1} puis la matrice $M = P^{-1}\,A\,P$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$: $M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

(c) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $M^n = P^{-1}\,A^n\,P$. En déduire A^n.

Exercice 19. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, où a est un paramètre réel.

(a) Calculer A^4

(b) Montrer que A est inversible si et seulement si $a \neq 0$.

(c) On suppose $a \neq 0$. Calculer A^{-1}, puis A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 20. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit N la matrice vérifiant $A = 2I + N$.

(a) Calculer N^p, $p \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $(A + I)^3$.

(b) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Montrer que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 22. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $M^2 - 5M + 6I$. Est-ce que M est inversible ?

(b) On note $A = M - 2I$ et $B = M - 3I$. Déterminer A^2 et B^2 , puis en déduire l'expression de A^n et de B^n pour tout entier $n \geq 1$.

(c) Calculer $A\,B$. Ensuite à l'aide de la question précédente, calculer M^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 23. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A étant inversible. On suppose que A et B commutent et que $B^4 = 0$. Montrer que la matrice $A - B$ est inversible et donner une expression de son inverse en fonction des matrices A, B et A^{-1}.

Exercice 24 (Formules de Cramer)**.** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Soient $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ les colonnes de A. Montrer que si $\det(A) \neq 0$, alors l'unique solution du système $Ax = b$, où $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'inconnues, est donnée par

$$\det(A)x_k = \det \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & \cdots & b & \cdots & v_n \end{array} \right), \quad \text{où } b \text{ est dans la colonne } k\text{-ième.}$$

(Hint : montrer la formule pour $n = 2$. Pour tout n utiliser la méthode des cofacteurs pour le calcul de l'inverse.)